V-10 (1h y 17 min) 10-Marzo-2019 Resumen de Miguel Cañizares	**Serie de Fourier (1ª parte)**

Producto escalar de funciones.- Suponemos conjunto de todas las funciones (bien comportadas en un intervalo) **{f(x)}** como un espacio vectorial.

Conocemos el producto escalar en $\mathbb{R}^3$de dos vectores con sus componentes: $\vec{f} \cdot \vec{v} = f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3$
De forma similar se puede definir el producto escalar de dos funciones, en un intervalo:

Versión con funciones discretizadas a ***p*** valores de un intervalo: $f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=1}^{n=p} f(x_n)\, g(x_n)$

Versión continua (depende del intervalo elegido *[a,b]*): $\boldsymbol{f(x) \cdot g(x) = \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx}$ **(I)**

Desarrollo en serie de Fourier.- Cualquier función ***f*(x) periódica** se puede expresar con componentes en una base formada por las infinitas funciones siguientes: {*1, cos x, cos 2x,… sen x , sen 2x, sen 3x…*}

$$\textbf{Base de Fourier} \equiv \{\boldsymbol{\cos nx}\ , \boldsymbol{\mathrm{sen}\, nx}\} \quad n = 0, 1, 2 \ldots . \infty$$

Cualquier función periódica se puede expresar:

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n\, \mathrm{sen}\, nx)} \qquad \textbf{(II)}$$

Para *n = 0* → *cos 0 = 1:* la primera componente de la serie es a_0 y *sen 0 = 0* (no produce ninguna componente)

Vamos a comprobar que la base de Fourier es ortogonal. Para ello, utilizamos la definición anterior de producto escalar y elegimos el intervalo [-π, +π] (las bases son funciones periódicas de periodo *L = 2π* y el intervalo elegido lo cubre). Planteamos los productos escalares de los elementos de la base:

$$\cos n_1 x \cdot \cos n_2 x = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(n_1 x) \cdot \cos n_2 x \cdot dx$$

$$\sin n_1 x \cdot \sin n_2 x = \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{sen}\, n_1 x \cdot \mathrm{sen}\, n_2 x \cdot dx$$

$$\cos n_1 x \cdot \sin n_2 x = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos n_1 x \cdot \mathrm{sen}\, n_2 x \cdot dx$$

Para resolver las integrales planteadas se utilizan las identidades trigonométrica siguientes:

Para cuando $n_1 = n_2 = n$ se utilizan:

$$cos^2 nx = \frac{1}{2}(1 + \cos 2nx) \quad ; \quad sen^2 nx = \frac{1}{2}(1 - \cos 2nx)$$

Para cuando $n_1 \neq n_2$ se utilizan:

$$\cos n_1 x \cdot \cos n_2 x = \frac{1}{2}[\cos(n_2 + n_1)\, x + \cos(n_2 - n_1)\, x]$$
$$\mathrm{sen}\, n_1 x \cdot \mathrm{sen}\, n_2 x = \frac{1}{2}[\cos(n_2 - n_1)\, x - \cos(n_2 + n_1)\, x]$$
$$\cos n_1 x \cdot \mathrm{sen}\, n_2 x = \frac{1}{2}[\mathrm{sen}(n_2 + n_1)\, x + \mathrm{sen}(n_2 - n_1)\, x]$$

Tras utilizar esas identidades trigonométricas, las integrales se convierten en inmediatas y fácilmente se obtienen los resultados siguientes para los productos escalares de las funciones de la base:

$$\left.\begin{aligned} \cos n_1 x \cdot \cos n_2 x &= \boldsymbol{\pi \cdot \delta_{n_1 n_2}} \\ \sin n_1 x \cdot \sin n_2 x &= \boldsymbol{\pi \cdot \delta_{n_1 n_2}} \end{aligned}\right\} \textbf{si } \boldsymbol{n_1 \neq n_2} \textbf{ da } \boldsymbol{0} \text{ ; } \textbf{si } \boldsymbol{n_1 = n_2} \textbf{ da } \boldsymbol{\pi}$$

$$\cos n_1 x \cdot \sin n_2 x = \mathbf{0}$$

Vemos que el producto escalar de dos elementos distintos de la base **resulta cero** (**ortogonales**) y el producto escalar de dos elementos iguales de la base **resulta *π*** (no tienen módulo 1)

Cálculo de los coeficientes a_n y b_n del desarrollo de Fourier

Si se tratara de vector en $\mathbb{R}^3$: $\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3 \quad \Longrightarrow \quad v_n = \frac{\vec{v} \cdot \vec{e}_n}{\vec{e}_n \cdot \vec{e}_n}$ (si la base es ortonormal $\vec{e}_n \cdot \vec{e}_n = 1$)
De forma similar:

$$a_n = \frac{f(x) \cdot \cos nx}{\cos nx \cdot \cos nx} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot \cos nx \cdot dx} \qquad \left(a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot dx\right) \qquad \textbf{(III)}$$

$$b_n = \frac{f(x) \cdot \mathrm{sen}\, nx}{\mathrm{sen}\, nx \cdot \mathrm{sen}\, nx} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot \mathrm{sen}\, nx \cdot dx} \qquad (b_0 = 0) \qquad \textbf{(IV)}$$

Forma compleja del desarrollo Fourier: Queremos expresar **(II)** utilizando exponenciales e^{inx}. Para ello utilizaremos la fórmula de Euler: $e^{ix} = \cos x + i \cdot sen\, x$

Se aprovecha la oportunidad para demostrar esta famosa fórmula. Utilizando el desarrollo de Taylor (I) del resumen de V-1 en el entorno de $x = 0$:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} \dots \infty = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots . \infty\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots \infty\right) = \cos x + i \cdot sen\, x$$

La parte real (primer paréntesis) es el desarrollo por Taylor de *cos x* en entorno de x = 0
La parte imaginaria (segundo paréntesis) es el desarrollo por Taylor de *sen x* en entorno x = 0

Una vez demostrada la fórmula de Euler, la utilizamos para establecer las siguientes igualdades:

$$\left.\begin{aligned} e^{inx} &= cos\, nx + i \cdot sen\, nx \\ e^{-inx} &= cos\, nx - i \cdot sen\, nx \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad cos\, nx = \frac{1}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right); \quad sen\, nx = -\frac{i}{2}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right)$$

Sustituimos en **(II)**, y agrupamos términos:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n \frac{1}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right) - \boldsymbol{i}\, b_n \frac{1}{2}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(a_n - \boldsymbol{i}\, b_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + \boldsymbol{i}\, b_n)e^{-inx}\right]$$

Llamamos $C_n = \frac{1}{2}(a_n - \boldsymbol{i}\, b_n)$ y $C_n^* = \frac{1}{2}(a_n + \boldsymbol{i}\, b_n)$, que son complejos conjugados, y ponemos:

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n e^{inx} + C_n^* e^{-inx}\right] = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n\ e^{inx}} \qquad \textbf{(V)}$$

Hemos extendido el sumatorio, tomando valores negativos de *n*, desde -∞ a +∞, y consideramos que para valores negativos de *n*, $\boldsymbol{C_{-n}}$ **representa el conjugado** $\boldsymbol{C_n^*}$, y así se pone la expresión de forma más compacta.

Según **(III) y (IV)** los coeficientes complejos se calcularán de la siguiente forma:

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - \boldsymbol{i}\, b_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot \cos nx \cdot dx - \boldsymbol{i}\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot \operatorname{sen} nx \cdot dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)[\cos nx - \boldsymbol{i} \operatorname{sen} nx]dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, e^{-\boldsymbol{i}nx} dx$$

Concluimos: $\boldsymbol{C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, e^{-inx} dx}$ y $\boldsymbol{C_{-n} = C_n^* = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, e^{+inx} dx}$ **(VI)**

Hagamos un cambio de variable ***x* → *y*** con objeto de que los límites de integración para calcular los coeficientes, en vez de abarcar el periodo concreto 2π (entre –π y +π) **abarquen un periodo general *L* (entre –*L/2* y +*L/2*).** Para ello el cambio debe ser tal que se cumpla:

$$\left.\begin{aligned} x = +\pi \quad &\to \quad y = +\frac{L}{2} \\ x = -\pi \quad &\to \quad y = -\frac{L}{2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad x = \frac{2\pi}{L}y \quad \to \quad dx = \frac{2\pi}{L}dy$$

Efectuamos el cambio en **(V)** y la serie de Fourier queda: $f(y) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n\ e^{i\frac{2\pi n}{L}y}$

Se renombra de nuevo (da igual poner *"y"* o *"x"*) → $\boldsymbol{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n\ e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}$ **(VII)**

Efectuando el cambio en **(VI)**, los coeficientes quedan: $C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} f(y)\, e^{-in\frac{2\pi}{L}y}\, \frac{2\pi}{L}dy$

Simplificando y renombrando de nuevo "y " por "x", queda:

$$\boldsymbol{C_n = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} f(x)\, e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} dx} \qquad \boldsymbol{C_{-n} = C_n^* = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} f(x)\, e^{+i\frac{2\pi n}{L}x} dx} \qquad \textbf{(VIII)}$$

Avance "motivacional": la serie de Fourier será útil para lo que llamaremos "cuantización canónica", que consistirá en coger la función ϕ(x) que representa a un campo y discretizarla (considerar puntos discretos de ella). A continuación, utilizando una versión discreta de la fórmula **(VII)** (DFT), se desarrolla el campo con transformada de Fourier. Entonces, los coeficientes C_n pasarán a ser operadores de la mecánica cuántica.